Programme de colles n°13

semaine du 8 au 12 janvier

Notions vues en cours

Chapitre 14 : Dérivation *(en complément de la semaine précédente)*

- Lien entre dérivée et monotonie : caractérisations de la monotonie (stricte ou non)
- Fonction (K-)lipschitzienne, le caractère lipschitz entraine la continuité
- Inégalité des accroissements finis, l'implication de l'énoncé est en fait une équivalence, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors f est K-lipschitzienne avec $K = \max_{[a,b]} |f'(x)|$
- Limite épointée de $f : I \to \mathbb{R}$ en un point $a \in I$, notation $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$, lien avec les limites à gauche et à droite en a (selon que a soit une extrémité de I ou un point intérieur de I)
- Théorème de la limite de la dérivée
- Fonction de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ensembles $\mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ – le $\mathbb{R}$ peut être omis
- Opérations sur $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$: combinaisons linéaires, produit avec la formule de Leibniz, quotient, composition
- Si f est bijective de classe $\mathcal{C}^n$ et que f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$
- Fonctions complexes : adaptation des définitions / résultats précédents (excepté les notions d'extremum, de monotonie, Rolle, TAF, etc.), $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{C}) \iff \mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}) \iff \overline{f} \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{C})$, une fonction complexe dérivable définie sur un intervalle est constante si et seulement si $f' = 0$ en tout point intérieur

Chapitre 15 : Convexité

- Fonction convexe : définition, caractérisation géométrique avec les cordes
- Inégalité de Jensen, inégalité des pentes (qui est aussi une caractérisation)
- Si f est convexe, son taux d'accroissement (en un point quelconque) est croissant
- Caractérisation de la convexité avec les variations de la dérivée
- Caractérisation de la convexité avec le signe de la dérivée seconde
- Position de la courbe d'une fonction convexe par rapport à sa tangente, à ses sécantes
- Fonction concave : définition, adaptation de tous les résultats précédents

Questions de cours

Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.

- Inégalité des accroissements finis, cas réel Chapitre 14, Théorème 14.22
- *Énoncés uniquement* : pour une fonction convexe OU une fonction concave (au choix de l'examinateur) : donner la définition, l'inégalité de Jensen, les caractérisations en fonction des dérivées première et seconde, ainsi que deux propriétés géométrique sur la courbe $\mathcal{C}_f$ Chapitre 15, Définition 15.2 ou 15.4, Propriétés 15.7 / 15.10 / 15.11 / 15.12 / 15.3 ou 15.5
- Inégalité des pentes : on ne fera la démonstration que (pour un sens et) dans le cas d'une fonction convexe Chapitre 15, Théorème 15.8